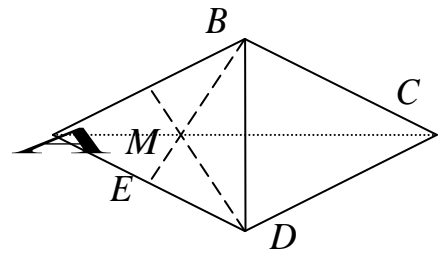


І тур олімпіади з математики 9 клас

- Пляшка, що може вмістити $\frac{1}{3}$ літра, заповнена на $\frac{3}{4}$ водою. Скільки води залишиться в пляшці після того, як з неї вилити 200мл?
А: нічого не залишиться; **Б:** 50мл; **В:** 75мл; **Г:** 130мл; **Д:** 245мл. (Відповідь: **Б**)
- Три вівторки у місяці припадають на парні числа. Який день тижня припадає на 21-е число цього місяця?
А: середа; **Б:** четвер; **В:** п'ятниця; **Г:** субота; **Д:** неділя. (Відповідь: **Д**)
- Ванда розрізає квадратний лист паперу з периметром 20см на два прямокутники. Периметр одного з них дорівнює 16см. Яким є периметр другого прямокутника?
А: 8см; **Б:** 9см; **В:** 12см; **Г:** 14см; **Д:** 16см. (Відповідь: **Г**)
- У магазині два іграшкових кенгуру мали однакову ціну. Перша іграшка подешевшала на 5 %, а друга подорожчала на 15%. Після цього різниця в ціні іграшок стала 6 грн. Якою стала ціна дешевшої іграшки кенгуру?
А: 1 грн.50 коп. **Б:** 6 грн. **В:** 28 грн.50 коп. **Г:** 30 грн. **Д:** 34 грн.50 коп. (Відповідь: **В**)
- Числа a і b мають різні знаки. Який з виразів, запропонованих у відповідях, є найбільшим?
А. $(|a| - |b|)^2$ **Б.** $|a^2 - b^2|$ **В.** $(a + b)^2$ **Г.** $(a - b)^2$ **Д.** $a^2 + b^2$

(Відповідь: **Г**)

- Дві висоти ромба, проведені з вершин його тупих кутів, перетинаються та діляться у відношенні **1:2**. Знайти кути ромба.



Розв'язання. Розглянемо $\triangle MED$. В нього катет EM вдвічі менше за гіпотенузу MD , тому $\angle EDM = 30^\circ \Rightarrow \angle DAB = 60^\circ$.

Тому друга пара кутів ромба складає 120° .

(Відповідь: $60^\circ, 120^\circ$.) (Задача легка, її повинні розв'язати. 5б або 0б)

- З цифр **0,1,2,3** скласти таке чотирицифрове число з усіма різними цифрами, яке при множенні на чотирицифрове число, що записано тими самими цифрами у зворотному порядку, мало найменший можливий добуток.

Розв'язання. Очевидно, що це повинні бути чотирицифрові числа з найменшими першими цифрами. Використати **0** не можна(1б), оскільки число перестане бути чотирицифровим. Таким чином треба розглянути дві можливості: $1032 \times 2301 = 2374632$ (3б) або $1302 \times 2031 = 2644362$. (4б) Таким чином, шуканими буде друга пара чисел. (5б)
 (Відповідь: **1032** або **2301**).

- Сашку дали стакан чорної кави. Він відпив 0,2 стакана і долив стакан молоком. Потім знову відпив 0,2 стакана і знову долив молоком. Випивши 0,6 стакана, він підрахував, що в тій частині, що залишилась, кави на 28 мл більше, ніж молока. Знайти об'єм стакана.

Розв'язання. Нехай x – об'єм стакана (мл). Тоді спочатку в стакані було x мл кави і 0 мл молока.

Після того, як Сашко відпив $\frac{1}{5}$ стакана перший раз і долив молока, матимемо в стакані $\frac{4}{5}x$ мл кави і

$\frac{1}{5}x$ мл молока.(2б) Далі він відпиває $\frac{1}{5}$ стакана, залишається: $\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5}x$ мл кави і $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}x$ мл молока, і

доливає $\frac{1}{5}x$ мл молока.(3б) В результаті стає $\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5}x = \frac{16}{25}x$ мл кави і $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}x = \frac{9}{25}x$ мл

молока.(4б) Потім він відпиває $\frac{3}{5}$ стакана, залишається: $\frac{2}{5} \cdot \frac{16}{25}x$ мл кави і $\frac{2}{5} \cdot \frac{9}{25}x$ мл молока. За

умовою, кави повинно бути на 28 мл більше, отже, маємо рівняння: $\frac{2}{5} \cdot \frac{16}{25} x = \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{25} x + 28$,

розв'язком якого є: $x = 250$. (56)

(Відповідь: 250 мл.)

9. Четверо хлопців помітили, що якщо вони складуть всі свої гроші без першого, то зберуть 90 грн, без другого - 85, без третього - 80, без четвертого - 75 грн.. Скільки у кожного грошей?

Розв'язання. Хай в першого - x грн., в другого - y , в третього - z , в четвертого - t .

Умови завдання визначають, що має місце система рівняння

$$\begin{cases} y + z + t = 90 \\ x + y + t = 85 \end{cases} \quad \begin{cases} x + z + t = 80 \\ x + y + z = 75 \end{cases} \quad (36)$$

Склавши всі рівняння, отримуємо, що $3(x + y + z + t) = 330$, (46) так що $x + y + z + t = 110$.

Віднімаємо з 110 послідовно 90, 85, 80, 75 знаходимо x, y, z, t . (56)

(Відповідь: 20, 25, 30, 35)

9 клас, I тур, 2012 р.

1. Знайти значення n , якщо $9^n + 9^n + 9^n = 3^{2011}$.

А: 1005 Б: 1006 В: 2010 Г: 2011 Д: інше число (Відповідь –А)

2. Дві пляшки однакового об'єму містять воду разом із соком. Відношення об'єму води до соку у кожній пляшці відповідно дорівнює 2:1 і 4:1. Якщо злити вміст обох пляшок в одну велику, то відношення вмісту води до соку буде:

А: 11:4 Б: 3:1 В: 5:1 Г: 6:1 Д: 8:1 (Відповідь –А)

3. Якщо $\frac{x-y}{x+y} = \frac{12}{13}$, то $\frac{x^2}{y^2}$ дорівнює:

А: 144/169 Б: 144/625 В: 1 Г: 144 Д: 625 (Відповідь –Д)

4. Петро чекає Оленку на зупинці 19 хвилин. Автобус А проходить кожні 3 хвилини, автобус В проходить кожні 5 хвилин. Нудьгуючи, хлопець порахував різницю між числом автобусів А та числом автобусів В, які проходили повз нього. Скільки різних результатів він міг отримати?

А: 0 Б: 1 В: 2 Г: 3 Д: 4 (Відповідь –Г)

5. Нехай a і b – катети прямокутного трикутника. Нехай d – діаметр вписаного кола, а D – діаметр описаного кола. Тоді $d+D$ дорівнює:

А: $a+b$ Б: $2\sqrt{a^2 + b^2}$ В: $0,5(a+b) + \sqrt{a^2 + b^2}$ Г: $2\sqrt{ab}$ Д: $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{ab}$ (Відповідь –А)

6. Побудувати графік рівняння: $y = \frac{25-x(10-x)}{x-5}$

7. Скласти квадратне рівняння з цілими коефіцієнтами, щоб один із його коренів дорівнював $1 - \sqrt{3}$.

8. Розв'язати рівняння: $x + \sqrt{6} = 2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$.

Розв'язання. Спростимо вираз $A = 2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$.

Оскільки $13 + \sqrt{48} = 13 + 4\sqrt{3} = 12 + 4\sqrt{3} + 1 = (2\sqrt{3} + 1)^2$, то

$$A = 2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{(2\sqrt{3} + 1)^2}}} = 2\sqrt{3 + \sqrt{5 - |2\sqrt{3} + 1|}} = 2\sqrt{3 + \sqrt{5 - 2\sqrt{3} - 1}} =$$

$$= 2\sqrt{3 + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}.$$

Далі, $4 - 2\sqrt{3} = 3 - 2\sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3} - 1)^2$, тому

$$\begin{aligned} A &= 2\sqrt{3 + \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}} = 2\sqrt{3 + |\sqrt{3} - 1|} = 2\sqrt{3 + \sqrt{3} - 1} = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \\ &= \sqrt{2} \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = \sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) = \sqrt{6} + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Розв'язання набуває вигляду $x + \sqrt{6} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

$$x = \sqrt{2}.$$

10. Чи існує трикутник, у якого середини всіх трьох висот лежать на одній прямій? Відповідь обґрунтувати.

Розв'язання: Існує. Це прямокутний трикутник. Перетином висот є вершина прямого кута, середини висот лежать на середній лінії трикутника, яка паралельна гіпотенузі.